目标定位最优布站的研究

王郑耀[1],汪宏武[2],杨敏[3]

指导教师：戴永红[1]

（1．西安交通大学理学院,西安,710049）

（2．西安交通大学生命科学学院,西安,710049）

（3．西安交通大学人机所,西安,710049）

摘要：本文将目标检测问题转化为椭球体的截面对圆的覆盖问题，并给出了“ 逐层收缩 ”方案，给出了一个可计算的较优的结果；通过对逐层收缩方案的调整，获得了最优解：18 个球（9 个红球和 9 个蓝球)。本文将目标定位问题转化为圆的三重覆盖问题，建立“ 球均定位能力 ”模型证明了一个红（蓝）球周围有 4 个蓝（红）球这种模式具有最大的球均定位能力，在此基础上给出红、蓝球的一个布局。36 个球（18 个红球和 18 个蓝球)。

关键词：目标探测，目标定位，多基雷达布站，最优布站

1．问题的背景

2004 年,首届研究生数学建模比赛的A题是“ 发现黄球并定位 ”。这个题目的背景是多基雷达布站问题[1，2]。红球和蓝球分别代表发射站和接收站，黄球是雷达要检测和定位的目标，比如飞机。本题是雷达对圆柱形区域中飞行目标的探测、定位的数学模型。

2．问题 1 的建模与求解

2．1 问题的简化

定义 1． 红球 R 和蓝球 B 的探测范围：给定红球 R 和蓝球 B 后，他们所能探测的所有空间点形成的区域。按题目中所给的要求，是一个以红球 R 和蓝球 B 为焦点、以长轴长为 L (=40m)的椭球体（实际上是上半个椭球)。

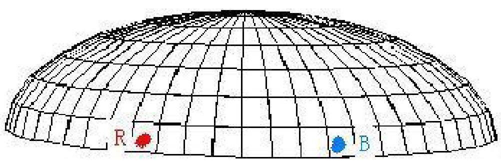


图 1 检测范围

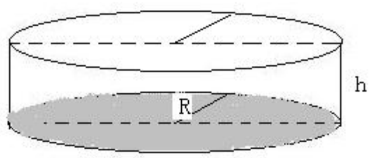


图 2 圆柱体示意图

当图 2 中圆柱体底面（阴影部分所示）中放置大量的红球和蓝球的时候，它们中的某些红、蓝球对可能形成一个形如椭球体的探测范围。问题 1 的意思是最少需要多少个红、蓝球？如何放置？使得它们所形成的椭圆能完全覆盖图 2 中半径 R＝50 米，高 H 为 10 米的圆柱体。下面先给出一个定理。

定理一.如图 2 所示，圆柱体底面（如图中阴影部分所示）上给定有限 I 个红球和 J 个蓝球（看作质点)，任意一个红球 $R_i, i=1,2,\cdots,I$ 和蓝球 $B_j, j=1,2,\cdots,J$ ，如果他们可以形成一个以 L＝40 米为长轴的椭球，那么这个椭球被高为 h 的圆柱的上表面截得部分在底面的投影记作 $S_{i,j}^h$,否则记做 $S_{i,j}^h=\varnothing$。设 $0.1=h_0<h_1\le h_2\le H$ ，则有 $\bigcup_{i,j} S_{i,j}^{h_2} \subseteq \bigcup_{i,j} S_{i,j}^{h_1}$。

证明：记 $O(R)$ 为半径为 R 的圆盘，即 $O(R)=\left\{(x,y):x^2+y^2\le R^2\right\}$。设第 i 个红球的座标记做

(x_i^R, y_i^R)，第 j 个蓝球的座标记做 (x_i^B, y_i^B)；第 i 个红球和第 j 个蓝球如上述形成的椭球体与半径的截面在底面上的投影 $S_{i,j}^h$ 可以表示为

$$S_{i,j}^h = O(R) \cap \left\{ (x,y) : \sqrt{(x-x_i^R)^2+(y-y_i^R)^2+h^2} + \sqrt{(x-x_j^B)^2+(y-y_j^B)^2+h^2} \le L \right\}$$ 显然

$$\left\{ (x,y) : \sqrt{(x-x_i^R)^2+(y-y_i^R)^2+h_2^2} + \sqrt{(x-x_j^B)^2+(y-y_j^B)^2+h_2^2} \le L \right\}$$
$$\subseteq \left\{ (x,y) : \sqrt{(x-x_i^R)^2+(y-y_i^R)^2+h_1^2} + \sqrt{(x-x_j^B)^2+(y-y_j^B)^2+h_1^2} \le L \right\}$$

所以，$S_{i,j}^{h_2} \subseteq S_{i,j}^{h_1}$。又由于 I，J 都有限，所以 $\bigcup_{i,j} S_{i,j}^{h_2} \subseteq \bigcup_{i,j} S_{i,j}^{h_1}$。证毕。

这个定理说明，这些椭球如果能将圆柱体中高度为 h 的圆面全部覆盖，那么圆柱体中高度小于 h 的面全部覆盖。于是，我们只需要考虑如何覆盖圆柱体的上表面中的点。由于圆柱是旋转对称的。直观上分析，我们认为底面上红球和蓝球分布的最优解具有旋转对称性：即，将这个分布旋转任意角度后，分布不变；以下称为问题的对称解。于是，我们有一个猜想：

命题 2．假设覆盖半径为 R 的圆柱最少需要红球和蓝球共 N 个，这样的覆盖方法不是唯一的，但是一定存在一个对称解。

这个命题我们无法在短期内证明。但是当 N 比较小时，我们验证了结论的正确性。我们假设它是正确的。

2．2 逐层收缩方案：

在命题 2 的基础上，我们给出一个计算红球和蓝球的最优分布的“逐层收缩”方案：如图 3 所示，在圆柱底面的同心圆周上（最优半径的计算见后）等间隔放置红球和蓝球各 k_1 个，覆盖圆柱顶面最外围区域；从而将还需要覆盖的区域的缩减为一个半径更小的圆盘的覆盖问题；用类似的方法计算出第二层球的分布以后，考虑到层间红球和蓝球还可以覆盖一部分区域（以下称“耦合效应”）和椭球截面在小圆盘中的部分（以下称“椭圆效应”），第二层球所在的圆周上的数目和半径还可以进一步减小（缩小方案见后）；依次类推，层层收缩，直到所有区域都被覆盖。

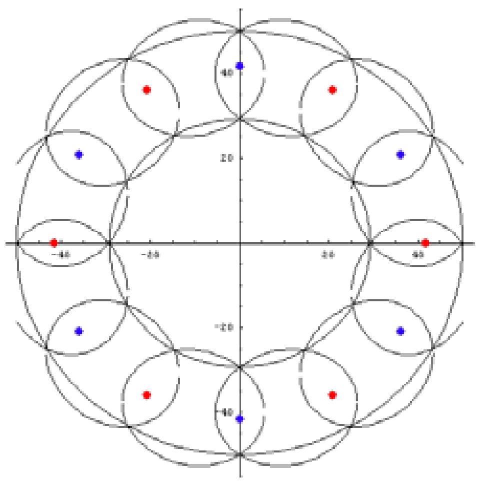


图 3 逐层收缩方案

2．2．1 半径为 R 的圆周覆盖的最优半径和球个数的计算

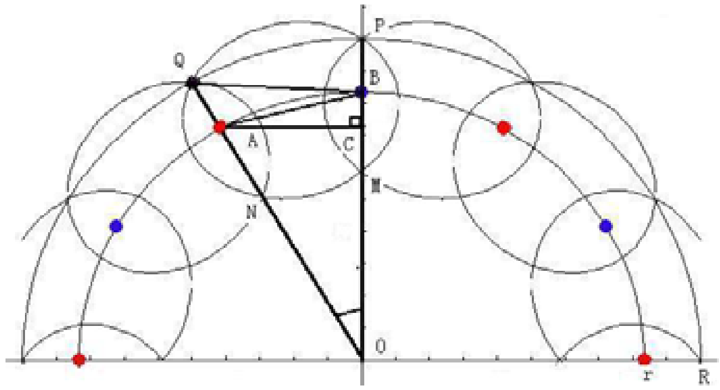


图 4 第一层覆盖的关系

如图 4 所示，为了减少冗余，相邻两个椭球截面的交点应该落在圆周上（如 Q 点）。易证，P、B、M、O 四点共线。 设圆盘半径为 R，由 $2k$ 个红、蓝球等间距间隔地落在半径为 r 的圆周上；则圆周

上点 P 满足$|AP|+|BP|=L$，于是得到了小球放置的圆周半径 r 和球的个数所满足的方程：

$$\sqrt{(R-r)^2+H^2}+\sqrt{(R-r\cos(\frac{Pi}{k}))^2+(r\sin(\frac{Pi}{k}))^2+H^2}=L \qquad (3.1)$$

当k比较小的时候，方程（1）中 r 无解，只有当k充分大以后，r 才有意义的解。不难发现，当 k 变大后，冗余增加，所以取使得（1）中 r 有解的最小的 k,同时可求得 r。

图 5 是在题目所给数据下最外围区域的覆盖，使用 6 各红球和 6 各蓝球间隔放置可以将圆周附近区域覆盖，这样将半径为$R^0=50$的圆盘的覆盖转化为半径为$R^1=29.28$的圆盘的覆盖问题。

2．2．2 收缩方案：

不考虑已经设定位置的红、蓝球的影响；问题转化为小圆盘的覆盖问题。这样只要重复上述步骤就可以。对题目所给的数据，经过计算使用两层就可以完全覆盖，如图 5 所示。总共需要 20 个球，红、蓝球各 10 个。这是一个完全可计算的方案。

但是，相邻两层之间红、蓝球之间的耦合作用和前一层覆盖中多出来的部分已经就可以覆盖收缩后的区域了。所以第二层开始，在不考虑耦合计算结果后减去 1 对球；然后将球等间隔放在一定半径的圆周上。如果可行，再减去一对球，…直到用(k_2-1)对不能覆盖为止；则第二层用k_2对球覆盖。

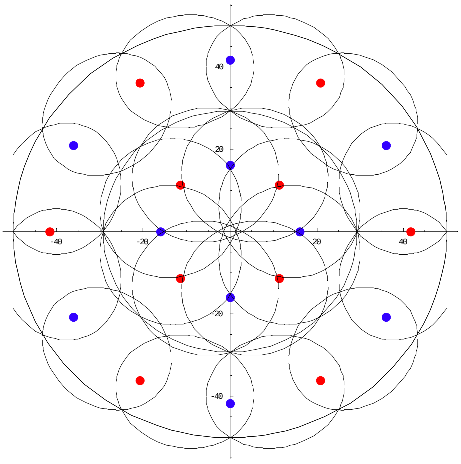


图 5 可计算的结果—20 个球的覆盖

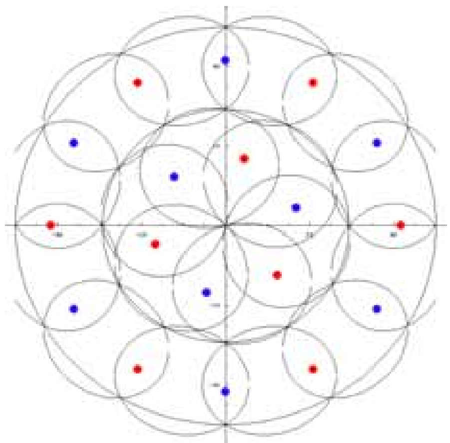


图 6 最优结果－可计算结果的改进

表 1 最优布站点的数据(只给出第一象限的数据,其余根据对称性得到)

n	坐标	n	坐标	n	坐标
1	(41.6559，0)	2	(36.0751，20.828)	3	(20.828，6.0751)
4	(0，41.6559)	5	(16.7298，4.48275)	6	(4.48275，16.7298)

对题目所给的数据，经过计算使用两层就可以完全覆盖，如图 6 所示。总共需要 18 个球，红、蓝球各 9 个。这就是我们得到的最优方案。表 1 是其布点方式。

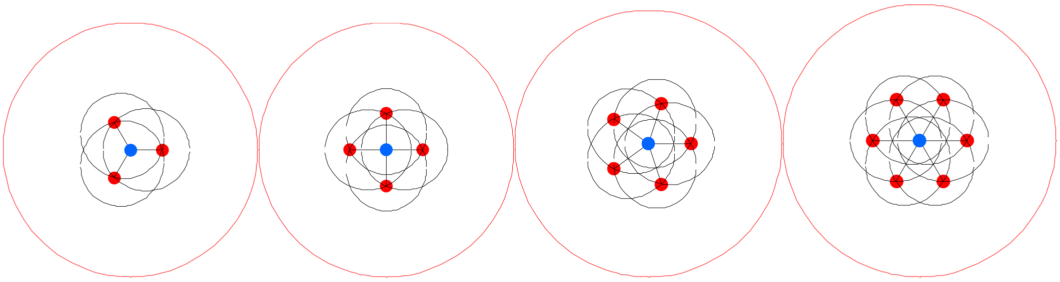
3． 题 2 的建摸与求解

3．1 题目略

首先，对每一个点定位需要 3 个数据[1,2]。第二问相当于将圆用椭球的截面覆盖三次。利用第一问的结论，最多只需要 18*3＝54 个球就可以实现。这是没有考虑相互之间的耦合，实际上用更少的球就可以实现。于是，问题的关键就是，如何选择好的红、蓝球之间的布站方式。

3．2 冗余最小的情形

虽然利用任意三对红、蓝球可以确定一个空间点，但是一个红球对三个蓝球或一个蓝球对三个红球这样的组合效率最高。因此，每个红球周围至少有 3 个蓝球并每个蓝球周围至少有 3 个红球。图 7 中是四种红球和蓝球互相搭配的模式，



(a)　(b)　(c)　(d)

图 7 四种红球和蓝球互相搭配的模式

分别是一个红（蓝）球周围有 3、4、5、6 个蓝（红）球的情形。随着红（蓝）球周围蓝（红）球个数的增加，它们能定位的区域会增加，但是球的个数也变大了。为了衡量每一个球对定位所做的贡献，引入一个概念：

定义 2.球均定位能力：即红、蓝球集合中平均每一个球对集合中所有球的定位所做的贡献。本文用平均每一个球的平均定位面积来衡量。

假设每一个红（蓝）球周围有 n 个蓝（红）球。为了保证至少有三对红蓝球可以同时定位某个黄球，如图 8 所示由 B、O 所确定的椭球截面必须过 A 点。于是根据题意有：

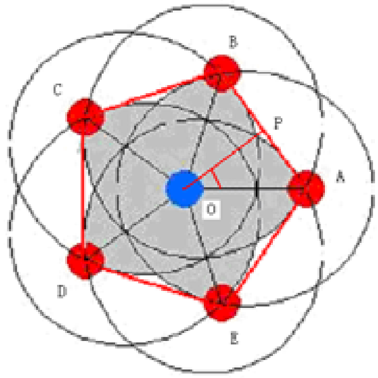


图 8 最优结构的选择

$$\sqrt{x^2+H^2}+\sqrt{\left(2x\sin(\frac{\pi}{n})\right)^2+H^2}=L$$

其中，$x=|BO|$。这样得到这 $n+1$ 个球定位的总为图中的阴影部分的面积。本文用简单的用正多边形 $ABCD\cdots$ 的面积来近似阴影部分的面积。$S_n\approx\overline{S}_{ABCD\cdots}=nx\cos(\frac{\pi}{n})\sin(\frac{\pi}{n})$，平均每一个球的能力为 $E_n=\frac{S}{n+1}=\frac{n}{n+1}x\cos(\frac{\pi}{n})\sin(\frac{\pi}{n})$，计算得到表 2：

表 2 球均定位能力

n	3	4	5	6	7	8
E_n	0.32476	0.4l	0.396274	0.371154	0.342051	0.31427

从表 2 中可见，使用图 9 中（b）结构是最优的。所以下面我们采用这种结构去覆盖圆盘。按照命题 2，我们寻找对称解。这种结构可以有两种对称覆盖的覆盖方法。就是覆盖中圆盘的中心位于图 9 中 01 处或者 02 处（标记 X）。

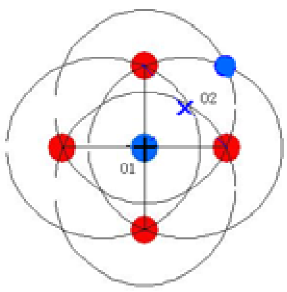
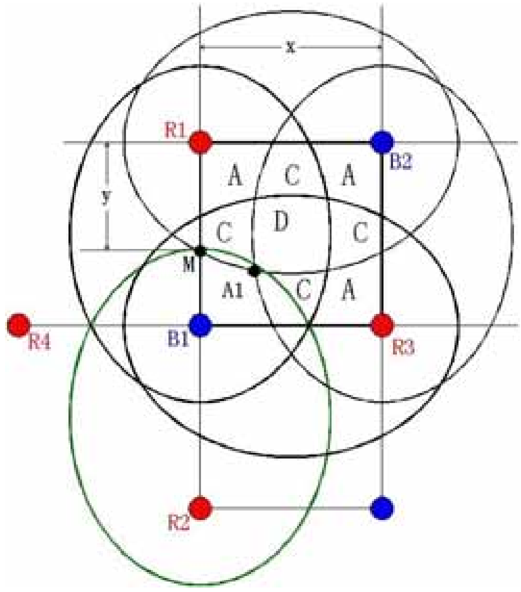
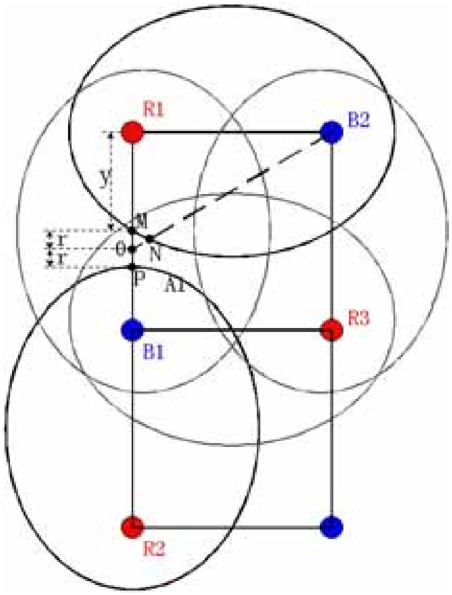


图 9 最优结构

3.3 正方形半径的确定



(a)



(b)

图 10 正方形布局的两种情形

3.3.1 不考虑圆锥影响时正方形半径的确定

当正方形半径的取值比较小，满足图 9 所示的情况时，正方形内所有点都至少被覆盖了四层，冗余过多。下面我们讨论能否通过减少冗余，增大正方形的边长，从而减少球的数目。

如图 10（a）所示，增大正方形的边长，只考虑以（R_1，B_1）、（R_1，B_2）、（R_3，B_1）和（R_3，B_2）为焦点的四个椭球体的投影区域，如图中的四个黑色类椭圆所示。以（R_1，B_2）为焦点的椭球投影将不再包含B_1点和R_3点，而以（B_2，R_3）为焦点的椭球投影也不再包含B_1点和R_1点，这就使得B_1点附近的A_1区域只被所有黑色类椭圆覆盖了 2 层，同理，其他A区域也只被黑色类椭圆覆盖了 2 层，但所有C区被覆盖 3 层，D区被覆盖 4 层。

下面考虑要使以（B_1，R_2）为焦点的椭球体的投影（绿色类椭圆）能覆盖A_1区，正方形边长所能取得的最大值。显然，边界情况就是绿色椭圆恰能包含A_1区。易证，当绿色类椭圆与正方形的R_1B_1边相交于M点（R_1B_1和类椭圆R_1B_2的交点）时，也能包含N点，所以这时的半径就是正方形半径的上界。事实上，这时（B_1，R_4）类椭圆也能包含A1 区域，从而使A1 区域被覆盖了 4 层。

设正方形边长为x，MR_1为y，H＝10 为圆柱体高度。由M点在类椭圆（R_1，B_2）和（R_2，B_1）上分别可得方程：$\sqrt{y^2+H^2}+\sqrt{y^2+x^2+H^2}=40$，$\sqrt{(x-y)^2+H^2}+\sqrt{(2x-y)^2+H^2}=40$，联立可解得x＝18.9037，y＝11.8861。

3.3.2 考虑圆锥影响时正方形半径的确定

考虑到是用一个顶角为 4°的圆锥而不是直线进行扫描，所以扫描线落在上底面上的斑点不是点，而是一个类似椭圆的区域，下面考虑它的影响。

当圆锥轴竖直向上时，在上底面的投影是圆形，设其半径为 r。容易证明，当圆锥以一定角度投向上底面时，其轴线与上底面交点到相交区域外沿的距离大于 r，而且不会大很多。所以为了简化起见，我们在任何角度时将这个距离都取为 r。且有

$$r = H \times \tan(2 * \pi / 180) = 10 \times 0.03492 = 0.3492(m)$$

结合实际情况，发射波投射到飞行物时，将发生漫反射而不是镜面反射，所以，下底面上的球到射线与上表面相交区域任意点的距离都可以看作是球到圆锥轴与上表面交点的距离。

如图 10（b）所示，对于最难覆盖的边界点O，取.$OM = ON = OP = r$.类椭圆（R1，B2）是圆

锥轴线与上表面的交线，但圆锥的外沿至少都可以射到O点，从而O点是能被（R_1，B_2）发现的。可以得到方程$\sqrt{(MR_1)^2+H^2}+\sqrt{(NB_2)^2+H^2}=40$。

设正方形边长为 x，MR1＝y，则

$$\sqrt{(y)^2+H^2}+\sqrt{(\sqrt{(y+r)^2+x^2}-r)^2+H^2}=40 \tag{3.3}$$

同理，根据 O 点和类椭圆（B1，R2）的关系，可得方程$\sqrt{(PB_1)^2+H^2}+\sqrt{(PR_2)^2+H^2}=40$，即

$$\sqrt{(x-y-2r)^2+H^2}+\sqrt{(2x-y-2r)^2+H^2}=40 \tag{3.4}$$

联立(3.4)和(3.5)，可解得：

$$x=19.2687\ ,\ y=11.7796$$

3.4 边界附近球的分布点的调整

按照上面的方法布完球以后，第一象限的边界区域如图 11 所示，必须对落在圆外的球B_1，R_1和B_2进行调整。最简单的方法是将B_1，R_1和B_2分别沿直线B_1B_3，R_1R_2和B_2B_4的方向移到圆周上，调整以后三个点的坐标可以通过求直线和圆的交点坐标得到。容易验证这时底面在第一象限内的所有部分至少得被覆盖了三层。根据对称性，其它象限的情况和第一象限类似。

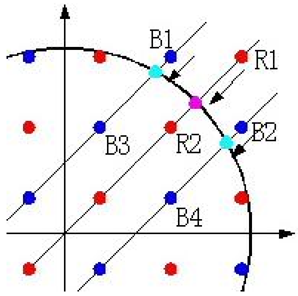


图 11 边界点的调整

3.5 最优的方案

利用上述结果，可以得到最优的方案为图 12。使用了 18 个红球和 18 个篮球。

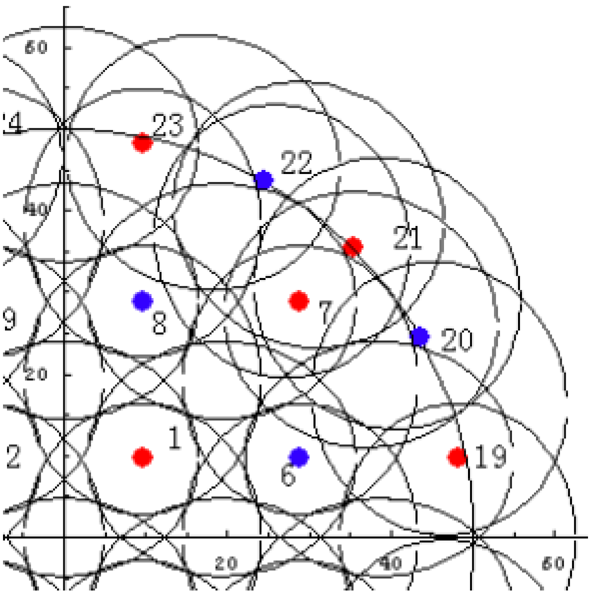


图 12 用来定位红、蓝球分布图

表 3 用来定位红、蓝球的坐标

n	坐标	n	坐标
1	(9.63, 9.63)	6	(28.89,9.63)
7	(28.89,28.89)	8	(9.63,28.89)
19	(48.15,9.63)	20	(43.648,24.388)
21	(35.355,35.355)	22	(24.388,43.648)
23	(9.63,48.15)		

图 12 中只显示了第一象限的 9 个球，对应的作标如表 3 所示。其它球的位置按照对称性可以得到。

参考文献

【1】 孙仲康等，单多基地有源无源定位技术，国防工业出版社，1996.5 P88－P95.
【2】 林育涛，自适应雷达定位系统的设计，计算机与数字工程，22（2），1994， P32－P40.
【3】 《数学手册》编写组，数学手册，高等教育出版社，1979.